

Daniela Stoica

Matematică

**Ghid complet
pentru Evaluarea Națională**

clasa a VIII-a

— ediție revizuită —



Booklet

Cuprins

Noțiuni de teorie.....	4
Exerciții și probleme	28
1. Mulțimea numerelor naturale	28
2. Mulțimea numerelor întregi.....	33
3. Mulțimea numerelor raționale	35
4. Mulțimea numerelor reale	43
5. Rapoarte și proporții. Procente. Probabilități	46
6. Calcul algebric	50
7. Funcții	54
8. Ecuații și sisteme de ecuații liniare. Inecuații. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor.....	58
9. Unghi.....	64
10. Triunghi	66
11. Patrulater.....	76
12. Cerc	89
13. Paralelism și perpendicularitate în spațiu. Poliedre.....	92
14. Corpuri rotunde	103
Teste	108
Răspunsuri	228

ALGEBRĂ

► Mulțimi

$\emptyset$ – **mulțimea vidă** (mulțimea care nu are niciun element)

Dacă un element x **aparține unei mulțimi** A se notează cu „ $x \in A$ ”, iar dacă un element y **nu aparține unei mulțimi** A se notează cu „ $y \notin A$ ”.

Dacă toate elementele unei mulțimi A se găsesc într-o altă mulțime B , atunci spunem că **A este inclusă în B** ($A \subset B$) sau că **mulțimea B include mulțimea A** ($B \supset A$).

Două **mulțimi** sunt **egale** dacă au aceleași elemente.

O **mulțime** este **finită** dacă totalul elementelor sale se poate exprima printr-un număr natural. **Cardinalul unei mulțimi finite** A reprezintă numărul elementelor sale și se notează cu **card A**. Dacă o mulțime nu este finită, atunci este **mulțime infinită**.

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$ – **mulțimea numerelor naturale**

$\mathbb{N}^* = \{1; 2; \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ – **mulțimea numerelor naturale nenule**

$\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$ – **mulțimea numerelor întregi**

$\mathbb{Z}_+ = \{1; 2; \dots\} = \mathbb{N}^*$ – **mulțimea numerelor întregi pozitive**

$\mathbb{Z}_- = \{\dots; -2; -1\}$ – **mulțimea numerelor întregi negative**

$\mathbb{Q}$ – **mulțimea numerelor raționale** (exemple: $2; -8; -1,5; 3; 1(4); \frac{5}{3}; -\frac{2}{9}$)

$\mathbb{R}$ – **mulțimea numerelor reale** (exemple: $8; -2; 1,35; -2,23(45); \frac{7}{10}; -\frac{10}{9}; \sqrt{5}; -\frac{4\sqrt{7}}{9}$)

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ – **mulțimea numerelor iraționale** (exemple: $\sqrt{35}; -2\sqrt{2}; -\frac{2\sqrt{5}}{3}$)

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

• Operații cu mulțimi

Reuniunea mulțimilor A și B , notată $A \cup B$, conține toate elementele celor două mulțimi, scrise o singură dată ($A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$).

Exemplu: $A = \{0, 1, 2, 3\}, B = \{0, 2, 4, 6, 8\} \Rightarrow A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

Intersecția mulțimilor A și B , notată $A \cap B$, conține elementele comune celor două mulțimi ($A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$).

Exemplu: $A = \{0, 1, 2, 3\}, B = \{0, 2, 4, 6, 8\} \Rightarrow A \cap B = \{0, 2\}$

Diferența dintre mulțimea A și mulțimea B conține elementele care sunt în mulțimea A și nu sunt în mulțimea B ($A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$).

Exemplu: $A = \{0, 1, 2, 3\}, B = \{0, 2, 4, 6, 8\} \Rightarrow A \setminus B = \{1, 3\}$ și $B \setminus A = \{4, 6, 8\}$

► Divizibilitatea numerelor naturale

Spunem că **un număr natural a se divide (este divizibil) cu un număr natural b** dacă există un număr natural c , astfel încât $a = b \cdot c$. Se notează „ $a : b$ ” (și se citește „ a se divide cu b ” sau a este divizibil cu b) sau „ $b \mid a$ ” (se citește „ b divide a ”). Vom spune că **a este un multiplu al lui b** sau că **b este un divizor al lui a** .

Spunem că **un număr natural a nu se divide cu un număr natural b** dacă nu există un număr natural c , astfel încât $a = b \cdot c$. Se notează $b \nmid a$ sau $a \nvdash b$.

Un **divizor comun** al numerelor naturale a și b este un număr natural d cu proprietatea $d \mid a$ și $d \mid b$.

Un **multiplu comun** al numerelor naturale a și b este un număr natural m cu proprietatea $m : a$ și $m : b$.

1 este divizor comun al tuturor numerelor naturale.

0 este multiplu comun al tuturor numerelor naturale.

criterii de divizibilitate

Un număr se divide cu 2 dacă are ultima cifră pară, adică 0, 2, 4, 6 sau 8.

Un număr se divide cu 5 dacă are ultima cifră 0 sau 5.

Un număr se divide cu 10^n dacă are ultimele n cifre egale cu 0.

Un număr se divide cu 3 dacă suma cifrelor sale este un număr divizibil cu 3.

Un număr se divide cu 9 dacă suma cifrelor sale este un număr divizibil cu 9.

Numere prime. Numere compuse

Dacă a este un număr natural diferit de 0 și 1, atunci 1 și a sunt **divizori improprii** ai lui a . Ceilalți divizori, dacă există, se numesc **divizori proprii**.

Un număr diferit de 0 și 1, care are doar divizori improprii, se numește **număr prim**. Un număr care are și divizori proprii se numește **număr compus**.

Determinarea celui mai mare divizor comun (c.m.m.d.c.) – se scriu numerele ca produse de puteri de numere prime, se aleg factorii comuni cu exponentul cel mai mic și se înmulțesc.

Determinarea celui mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c.) – se scriu numerele ca produse de puteri de numere prime, se aleg toți factorii comuni și necomuni, o singură dată, cu exponentul cel mai mare și se înmulțesc.

Exemplu: $24 = 2^3 \cdot 3$ c.m.m.d.c. (24, 18) = $2 \cdot 3 = 6$
 $18 = 2 \cdot 3^2$ c.m.m.m.c. (24, 18) = $2^3 \cdot 3^2 = 72$

Relația între c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. ale două numere naturale a și b :

$(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$, unde (a, b) – c.m.m.d.c., $[a, b]$ – c.m.m.m.c.

Numerele prime între ele sunt numerele care nu au divizori comuni în afară de 1.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{de } n \text{ ori}}, a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

↑
bază

↑
exponent

Prin definiție, $a^0 = 1$, pentru orice număr natural nenul a , și $a^1 = a$, pentru orice număr natural a .

Observație: 0^0 nu are sens.

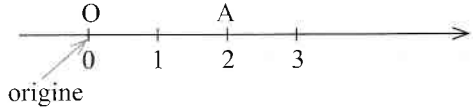
Dacă $a \in \mathbb{R}^*$ și $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Reguli de calcul cu puteri

Dacă a și b sunt numere reale nenule, iar m și n sunt numere întregi, atunci:

- a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; c) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$; e) $a^n : b^n = (a : b)^n$.
b) $a^m : a^n = a^{m-n}$; d) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$;

Axa numerelor este o dreaptă pe care este fixat un punct O , numit origine, o unitate de măsură și un sens. Oricărui număr real îi corespunde un punct pe axa numerelor.



Numărul este coordonata punctului respectiv. Punctul A din figura de mai sus are coordonata 2 (scriem $A(2)$). Originea axei numerelor are coordonata 0.

Opusul numărului real nenul a este numărul real $-a$. Opusul numărului 0 este 0.

Inversul numărului real nenul a este $\frac{1}{a}$.

Modulul unui număr real x este $|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$.

Exemple: $|12| = 12$; $|0| = 0$; $|-12| = 12$

Fracții ordinare și fracții zecimale

O pereche de numere naturale a și b , cu $b \neq 0$, scrisă sub forma $\frac{a}{b}$, reprezintă o **fracție** (**fracție ordinară**).

Pentru orice fracție $\frac{a}{b}$, a se numește **numărător**, iar b se numește **numitor**.

Fracția $\frac{a}{b}$ este $\begin{cases} \text{subunitară, dacă } a < b \text{ (exemplu: } \frac{8}{15}) \\ \text{echiunitară, dacă } a = b \text{ (exemplu: } \frac{2}{2}) \\ \text{supraunitară, dacă } a > b \text{ (exemplu: } \frac{9}{6}) \end{cases}$.

Două fracții $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{N}, b \neq 0, d \neq 0$) se numesc **fracții echivalente** dacă reprezintă aceeași parte dintr-un întreg sau din mai mulți întregi identici. Se notează $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Dintre două fracții care au același numitor, mai mare este fracția care are numărătorul mai mare. Dintre două fracții care au același numărător, mai mare este fracția care are numitorul mai mic.

Exemple: $\frac{7}{10} > \frac{3}{10}$; $\frac{9}{5} < \frac{9}{2}$.

Scoaterea întregilor din fracția $\frac{a}{b}$, $a > b$, se realizează efectuând împărțirea cu rest $a : b$.

$$\begin{array}{r} 25 : 4 = 6 \text{ rest } 1 \Rightarrow \frac{25}{4} = 6 \frac{1}{4} \\ \underline{24} \\ 1 \end{array}$$

Introducerea întregilor în fracție se face astfel: $m \frac{n}{p} = \frac{m \cdot p + n}{p}$.

A simplifica o fracție cu un număr natural diferit de 0 înseamnă a înmulți și numărătorul și numitorul acesteia cu acel număr. Exemplu:

$$2) \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{6}{8}$$

A simplifica o fracție printr-un număr diferit de 0 și de 1 înseamnă a împărți și numitorul și numărătorul acesteia la acel număr.

$$\frac{9}{15} \stackrel{(3)}{=} \frac{9 : 3}{15 : 3} = \frac{3}{5}$$

Fracția care nu se mai poate simplifica se numește **fracție ireductibilă**. Exemplu: $\frac{2}{9}$.

Adunarea, scăderea, înmulțirea, împărțirea fracțiilor ordinare

- Pentru a aduna/scădea două fracții, acestea trebuie aduse la același numitor (c.m.m.m.c. al numerelor care reprezintă numitorii celor două fracții).

- $n \cdot \frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{b}$; $\frac{a}{b} \cdot n = \frac{a \cdot n}{b}$; $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$, pentru orice numere naturale a, b, c, d, n , $b \neq 0, d \neq 0$

- $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$, pentru orice numere naturale a, b, c, d , $b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$

Aflarea unei fracții dintr-un număr: $\frac{a}{b}$ din $c = \frac{a \cdot c}{b}$, pentru a, b, c numere naturale, $b \neq 0$.

► Procente

Fracția de forma $\frac{p}{100}$, unde p este un număr natural, se numește procent. Se notează cu $p\%$ și se citește „p la sută”. Pentru a afla $p\%$ dintr-un număr n procedăm astfel:

$$p\% \text{ din } n = \frac{p}{100} \cdot n = \frac{p \cdot n}{100}$$

1. Mulțimea numerelor naturale

1. Calculați:

- a) $2 \cdot 8 - 10$; d) $(11 + 33 + 66) : 11$;
 b) $17 + 2 \cdot 3 + (17 + 2) \cdot 3$; e) $18 + 19 : 19 - 19$;
 c) $12 \cdot 5 + 120 - 12 \cdot 15$; f) $600 : 25 - 38 : 19$.

2. Calculați $a - b + c$ și $a - (b + c)$ în fiecare dintre cazurile următoare:

- a) $a = 15, b = 3, c = 7$; c) $a = 2^5, b = 3^3, c = 4^0$;
 b) $a = 108, b = 98, c = 10$; d) $a = 3^3 + 4^3, b = 2^3 + 3^3, c = 5^2 + 5^1$;

3. a) Calculați $xy + 5xz - 4x$, știind că $y + 5z = 7$ și $x = 3$.

b) Calculați $2ab + 3bc + 4b^2$, știind că $2a + 3c + 5b = 22$ și $b = 2$.

c) Calculați x , știind că $xy + xz = 18$ și $y + z = 3$.

d) Calculați $a - b + 3$, știind că $ax - bx + 7 = 21$ și $x = 2$.

e) Calculați $x + 23 + y + 5$, știind că $y + x = 173$.

f) Calculați $17 + y + 24 + x$, știind că $x + 4 + y = 282$.

4. Ordonăți descrescător numerele a, b, c , știind că:

$a = 312 - (24 + 67), b = 312 - 24 + 67, c = 312 + 24 - 67$.

5. Dacă $a = 15 \cdot 9$ și $b = 27 \cdot 105$, calculați:

- a) $b : a$; b) $a + b$; c) $(b - a) : a$;
 d) $(b + a - 22) : 22$; e) $(a + b)(b - a)$.

6. a) Determinați $4x + 20y$, știind că $x + 5y = 14$.

b) Determinați $12x - 9y + 8$, știind că $4x - 3y + 4 = 15$.

c) Determinați $2x + 3y + 4z$, știind că $x + y + z = 28$ și $x + 2y + 3z = 68$.

d) Determinați $6x + 17y + 2z$, știind că $x + 4y = 9$ și $3x + 5y + 2z = 19$.

e) Determinați $11x + 15y + 14z$, știind că $x + 5y = 17$ și $4x + 7z = 15$.

f) Determinați $x + 6y$, știind că $x + 5y = 49$ și $x + 7y = 67$.

7. a) Produsul numerelor naturale a și b este egal cu 208, iar produsul numerelor naturale $a + 4$ și b este egal cu 272. Determinați numerele a și b .

b) Produsul numerelor naturale a și b este egal cu 3465, iar produsul numerelor naturale a și $b - 22$ este egal cu 3135. Determinați numerele a și b .

8. Aflați două numere naturale x și y , știind că, dacă îl mărim pe y cu 6, produsul celor două numere se mărește cu 42, iar, dacă îl micșorăm pe x cu 4, produsul celor două numere se micșorează cu 32.

9. Aflați numerele de trei cifre care au produsul cifrelor egal cu 6.

10. Câte numere de forma $\overline{ab}$ cu ambele cifre impare există?

11. Calculați $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$, știind că $a + b + c = 7$.

12. Determinați numerele naturale de forma $\overline{ab}$, cu proprietatea $\overline{ab} + \overline{ba} = 66$.

- 13.** Determinați numărul natural de două cifre care adunat cu suma cifrelor sale dă 76.
- 14.** Arătați că $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} \vdots 37$, pentru oricare cifre nenule a, b, c .
- 15.** a) Determinați numărul de forma $\overline{ab}$ pentru care $\overline{3ab} + \overline{ab5} = 558$.
 b) Determinați numărul de forma $\overline{ab}$ pentru care $\overline{2ab6} + \overline{ab32} = 9958$.
 c) Determinați numerele naturale de patru cifre care se micșorează cu 2916 dacă ultima cifră se mută în fața numărului.
- 16.** Calculați:
 a) $1 + 2 + 3 + \dots + 100$; d) $10 + 20 + 30 + \dots + 2020$;
 b) $1 + 3 + 5 + \dots + 99$; e) $1 + 4 + 7 + \dots + 301$;
 c) $4 + 8 + 12 + 16 + \dots + 96$; f) $3 + 8 + 13 + 18 + \dots + 1008$.
- 17.** Se dau numerele naturale:
 $a = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2019$ și $b = 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2020$.
 a) Comparați numerele a și b .
 b) Calculați $b - a$.
 c) Arătați că a este pătrat perfect.
 d) Arătați că b este divizibil cu 101.
 e) Determinați restul împărțirii numărului $a + b$ la 2020.
- 18.** La o împărțire de numere naturale, câtul este 5 și restul este 14. Suma dintre deîmpărțit, împărțitor, cât și rest este 135. Aflați deîmpărțitul și împărțitorul.
- 19.** Prin împărțirea numărului natural n la 8 se obține câtul 7 și restul egal cu 3. Aflați numărul n .
- 20.** Calculați suma numerelor naturale care prin împărțire la 7 dau câtul 9.
- 21.** Calculați suma numerelor naturale care prin împărțire la 8 dau câtul 6 și restul un număr natural par.
- 22.** Prin împărțirea numărului natural n la 8 se obține restul 5. Aflați restul împărțirii numărului n la 4.
- 23.** Arătați că nu există numere naturale care prin împărțire la 6 să dea restul 3, iar prin împărțire la 9 să dea restul 4.
- 24.** a) Fie x și y două numere naturale și $a = 14x + 35y + 47$. Aflați restul împărțirii lui a la 7.
 b) Aflați restul împărțirii numărului $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2018 + 2019$ la 2020.
- 25.** Determinați numerele naturale $\overline{xy\overline{z}}$ care prin împărțire la $\overline{yz}$ dau câtul 4 și restul $4x$.
- 26.** Comparați următoarele numere:
 a) 2^{521} și 2^{723} ; f) 2^{30} și 3^{20} ;
 b) 3^{49} și 9^{25} ; g) 5^{27} și 2^{63} ;
 c) 4^{35} și 8^{20} ; h) 3^{210} și 5^{140} ;
 d) 5^{200} și 125^{60} ; i) 10^{70} și 5^{100} ;
 e) 125^{15} și 25^{20} ; j) 200^{30} și $8^{10} \cdot 10^{60}$.

27. Calculați:

BRIS

We know
books

a) $2^2 + 3^2 + 4^2$;

b) $5^3 - 5^2$;

c) $11^3 - 3^6 + 7^0 + 0^7$;

d) $(3 + 2)^2 + (7 - 3)^3$;

e) $3^{71} : 3^{69}$;

f) $2^3 \cdot 2^5$;

g) $(3^{10})^2 : (3^2)^9$;

h) $3^4 \cdot 3^6 \cdot 3^5 : (3^3)^4$;

i) $25^{10} \cdot 5^{30} : 125^{16} : (5^3)^0$;

j) $3^{44} \cdot 9^{25} : 27^{30}$;

k) $4^{50} : 8^{30} : 16^2$;

l) $(3^3)^{15} : (27^2)^3 : 81^6$.

28. Efectuați calculele, utilizând factorul comun:

a) $2^{57} + 2^{58} + 2^{59}$;

b) $6 \cdot 5^{42} + 3 \cdot 5^{43} + 2 \cdot 5^{44}$;

c) $11^{14} - 3 \cdot 11^{13} - 11^{12} \cdot 2$;

d) $8^{100} - 3 \cdot 8^{98} - 8^{97} \cdot 7$.

29. Determinați numărul natural n în fiecare caz:

a) $8^n + 8^{n+1} = 72$;

b) $6^n + 6^{n+3} = 217 \cdot 6^{10}$;

c) $3^4 \cdot 3^5 \cdot 3^{16} = 3^{5n}$;

d) $(8 \cdot 4)^{10} : 4^5 : 2^3 = 2^n$;

e) $7^{2n+1} + 7^{2n+3} = 350 \cdot 7^{100}$;

f) $5^{2n-1} + 5^{2n} = 750$;

g) $2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^{10} = 2^n$;

h) $3^2 \cdot 3^4 \cdot 3^6 \cdot \dots \cdot 3^{50} = 9^n$.

30. Calculați:

a) $2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100}$;

c) $(4^2 + 4^4 + 4^6 + \dots + 4^{40}) \cdot 15$.

b) $(3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{50}) \cdot 2 + 9$;

31. Determinați ultima cifră a numerelor:

a) 2^{101} ;

b) 2019^{2019} ;

c) $1^{2020} + 2^{2019} + 3^{2018} + 4^{2017} + 5^{2016} + 6^{2015} + 7^{2014} + 8^{2013} + 9^{2012}$.

32. Arătați că numărul $n = 8^{2018} + 6^{2019} + 5^{2020}$ este divizibil cu 5.**33. Determinați numerele de forma $\overline{ab}$ pentru care $15 \cdot \overline{ab}$ este pătrat perfect.****34. Arătați că numărul $n = \overline{ab} + \overline{ba} - \overline{aa} - \overline{bb} + 64$ este atât pătrat perfect, cât și cub perfect.****35. Fie n un număr natural nenul și $x = 10^n + 3$. Arătați că x nu este pătrat perfect.****36. Arătați că numărul $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 15 + 7$ nu este pătrat perfect.****37. Arătați că numărul $x = 7^{2n} + 2 \cdot 7^{2n+1} + 7^{2n+2}$ este pătratul unui număr natural pentru orice număr natural n .****38. Arătați că numărul $x = (2 \cdot 5^{92} + 2 \cdot 5^{91} + 4 \cdot 5^{90}) \cdot 125^4$ este cub perfect.****39. Se consideră mulțimea $A = \{0, 1, 2, 4, 5, 9, 12, 239, 448, 1230\}$. Determinați mulțimile $A \cap D_2$, $A \cap D_{12}$, $A \cap D_5$, $A - D_{10}$, $A \cap M_3$, $A \cap M_2$, $A \cap M_{10}$ (mulțimea D_n reprezintă mulțimea divizorilor naturali ai numărului n , iar mulțimea M_n reprezintă mulțimea multiplilor naturali ai numărului n).****40. Se consideră mulțimile $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 23 \leq x \leq 51\}$, $B = \{x \mid x \in A \text{ și } x : 3\}$,**

$C = \{x \mid x \in A \text{ și } x : 2\}$, $D = \{x \mid x \in A \text{ și } 9 \mid x\}$, $E = \{x \mid x \in A \text{ și } x : 5\}$,

$F = \{x \mid x \in A \text{ și } x : 10\}$, $G = \{x \mid x \in A \text{ și } x \text{ e număr prim}\}$.

Enumerați elementele mulțimilor A, B, C, D, E, F, G .

41. Determinați suma divizorilor naturali ai numărului x în fiecare caz:

- a) $x = 18$; b) $x = 3^4$; c) $x = 5$.

42. Determinați numărul de divizori naturali ai numerelor:

- a) 45; b) 49; c) 125; d) 216.

43. Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 4 < 9\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ e divizor al lui } 12\}$.

- a) Determinați elementele mulțimilor A și B .
b) Determinați elementele mulțimilor $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.
c) Calculați cardinalul mulțimii A .

44. a) Determinați numerele de forma $\overline{25b}$ divizibile cu 2.

b) Câte numere de forma $\overline{6a7b}$ divizibile cu 5 există?

c) Determinați numerele de forma $\overline{2a3b}$ divizibile cu 3.

d) Câte numere de forma $\overline{xyx}$ divizibile cu 2 există? Care este cel mai mare dintre acestea?

45. Se consideră mulțimile $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \overline{3n4} : 3\}$ și $B = \{n \in \mathbb{N} \mid \overline{32n} : 2\}$. Determinați elementele mulțimilor A , B , $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$ și cardinalul mulțimii B .

46. a) Determinați numerele naturale a și b , știind că numărul $\overline{a53b}$ e divizibil cu 15.

b) Determinați numerele naturale a , b și c , știind că numărul $\overline{2abc}$ e divizibil cu 90.

c) Calculați suma numerelor de forma $\overline{4a7b}$, care sunt divizibile cu 45.

47. Arătați că:

a) $7^n + 7^{n+1} + 7^{n+2} : 3$, pentru oricare număr natural n .

b) $7 \cdot 5^{2n+1} + 5^{2n+2} \cdot 12 + 5^{2n+4} : 48$, pentru oricare număr natural n .

c) $2^{n+3} \cdot 3^{n+1} + 6^n \cdot 5 + 2^{n+2} \cdot 3^n : 11$, pentru oricare număr natural n .

d) $25 \cdot 12^n \cdot 3^{n+2} + 6 \cdot 4^{n+1} \cdot 9^{n+2} + 18^{n+2} \cdot 2^{n+3} : 23$, pentru oricare număr natural n .

e) $2^{n+2} \cdot 5^{n+3} + 1 : 3$, pentru oricare număr natural n .

48. Arătați că:

a) $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{50} : 7$;

b) $3^2 + 3^3 + \dots + 3^{101} : 12$;

c) $5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2020} : 31$.

49. Determinați numărul natural n în fiecare caz:

a) $(n+2) \mid 15$;

d) $(n+1) \mid (2n+3)$;

b) $(2n+3) \mid 20$;

e) $(2n+5) \mid (4n+28)$;

c) $30 : (2n+1)$;

f) $(3n+1) \mid (7n+9)$.

50. Determinați numărul natural n , știind că $(n+7) \mid (2n-8)$ și $(2n-8) \mid (n+7)$.

51. Determinați elementele mulțimilor:

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{5}{n+1} \in \mathbb{N} \right\}, B = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{2n+5}{n+1} \in \mathbb{N} \right\},$$

$$C = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{6n+10}{2n+1} \in \mathbb{N} \right\}, D = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{7n+14}{3n+2} \in \mathbb{N} \right\}.$$

- 52.** a) Determinați numerele prime a, b și c , știind că $a + 4b + 6c = 56$.
b) Determinați numerele prime a, b și c cu proprietatea $5a + 3b + 10c = 140$.
- 53.** a) Fie x și y numere naturale cu proprietatea că $5 \mid (7x + 2y)$. Arătați că $5 \mid (x + y)$.
b) Fie x și y numere naturale cu proprietatea că $3 \mid (7x + 4y)$. Arătați că $3 \mid (5x + 2y)$.
- 54.** Determinați cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b și verificați relația $[a, b] \cdot (a, b) = a \cdot b$, unde $[a, b]$ reprezintă cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b , iar (a, b) reprezintă cel mai mare divizor comun:
a) $a = 78, b = 60$; c) $a = 112, b = 252$;
b) $a = 450, b = 1300$; d) $a = 45, b = 98$.
- 55.** Determinați numerele naturale a și b , știind că:
a) $(a, b) = 3$ și $a + b = 18$; d) $(a, b) = 12$ și $[a, b] = 216$;
b) $(a, b) = 5$ și $a \cdot b = 750$; e) $(a, b) = 12$ și $a \cdot b = 13824$;
c) $(a, b) = 7$ și $2a + 3b = 168$; f) $a \cdot b = 3648$ și $[a, b] = 912$.
- 56.** a) Arătați că numerele $n + 2$ și $7n + 15$ sunt prime între ele, pentru oricare număr natural n .
b) Arătați că numerele $4n + 9$ și $3n + 7$ sunt prime între ele, pentru oricare număr natural n .
- 57.** a) Arătați că $(n + 4, 4n + 17) = 1$, pentru oricare număr natural n .
b) Arătați că $(2n + 3, 5n + 7) = 1$, pentru oricare număr natural n .
- 58.** Determinați cel mai mic număr de elevi care se pot alinia în coloane de câte 6 elevi, 8 elevi și 10 elevi.
- 59.** Trei autobuze pleacă dintr-o stație în fiecare dimineață la ora 6. Primul revine în stație din oră în oră, al doilea din 2 în 2 ore, iar al treilea din 90 în 90 de minute. După câte ore se întâlnesc din nou în stație cele trei autobuze?
- 60.** Determinați cel mai mic număr natural care împărțit la 18, 45 și 54 dă de fiecare dată restul 13 și câțuri nenule.
- 61.** Determinați cel mai mic număr natural care împărțit la 24, 30 și 81 dă de fiecare dată restul 15 și câțuri nenule.
- 62.** Determinați numerele naturale cuprinse între 2000 și 5000 care împărțite la 28, 49 și 35 dau de fiecare dată restul 10 și câțuri nenule.
- 63.** Determinați cel mai mic număr natural care împărțit la 14 dă restul 8, împărțit la 15 dă restul 9 și împărțit la 60 dă restul 54.
- 64.** Determinați numerele naturale cuprinse între 100 și 1000, care împărțite la 12, 15 și 18 dau resturile 6, 9, respectiv 12, și câțuri nenule.
- 65.** Determinați cel mai mic număr natural care împărțit la 7 dă restul 1, împărțit la 8 dă restul 4 și împărțit la 9 dă restul 7.
- 66.** Împărțind numerele 1018 și 2018 la același număr natural nenul, n , obținem resturile 17, respectiv 16. Determinați toate valorile numărului n .

- 67.** Împărțind numerele 642, 385 și 532 la același număr natural nenul n , se obțin resturile 12, 10, respectiv 7. Determinați numărul la care au fost împărțite.
- 68.** Numerele 129, 93 și 168 se împart la același număr natural nenul și se obțin resturile 9, 13, respectiv 8.
- Determinați cel mai mare număr natural care îndeplinește condițiile problemei.
 - Determinați cel mai mic număr natural care îndeplinește condițiile problemei.
 - Câte numere naturale îndeplinesc condițiile problemei?
- 69.** Calculați media aritmetică a numerelor:
- 10 și 28;
 - 7; 17; 15 și 5.
- 70.** Media aritmetică a două numere este 24. Aflați unul dintre numere, știind că celălalt este 31.
- 71.** Media aritmetică a trei numere este 56, iar media aritmetică a primelor două este 49. Determinați cel de-al treilea număr.
- 72.** Fiecare dintre cei 583 de elevi ai unei școli vorbește fluent cel puțin una dintre limbile engleză sau franceză. Dintre aceștia, 415 vorbesc fluent limba engleză și 270 vorbesc fluent limba franceză.
- Câți elevi vorbesc fluent ambele limbi?
 - Câți elevi vorbesc fluent numai limba franceză?
- 73.** Optsprezece elevi ai unei clase participă la cercul de lectură, iar 19 participă la cercul de informatică. Știind că în clasă sunt 30 de elevi și fiecare dintre ei participă la cel puțin una dintre aceste activități, aflați câți elevi participă atât la cercul de lectură, cât și la cercul de informatică.
- 74.** Într-o clasă sunt 28 de elevi. Dintre aceștia, 14 joacă fotbal, 20 joacă handbal, iar 3 nu joacă nici fotbal, nici handbal. Câți elevi din clasă joacă numai fotbal?
- 75.** În vacanța de primăvară, elevii unei clase merg la muzeu sau la grădina zoologică. Se știe că 17 elevi merg numai la muzeu, 15 merg numai la grădina zoologică, iar 5 elevi merg și la muzeu și la grădina zoologică. Aflați câți elevi sunt în acea clasă.

2. Mulțimea numerelor întregi

- 1.** Se dau mulțimile $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x < 3\}$ și $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leq 0\}$.
- Scrieți elementele mulțimilor A și B .
 - Calculați suma elementelor mulțimii A .
 - Determinați elementele mulțimilor $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.
- 2.** Se dau mulțimile $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x < 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| < 7\}$, $C = \{x \in \mathbb{Z}_- \mid x \geq -8\}$, $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}$, $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < -2\}$.
- Determinați cardinalul mulțimilor A , B , C , D , E .
 - Determinați mulțimile $A \cap B$, $C \cup B$, $C \cap D$, $C \cup D$, $D \setminus A$, $A \setminus B$, $B \setminus C$, $A \setminus (C \cup D)$, $B \cap (C \cup D)$, $E \cup (D \setminus A)$.